# Transformée en échelle de signaux stationnaires

Daniel Alpay, Mamadou Mboup

# Transformée en échelle de signaux stationnaires

Daniel Alpay* [a], Mamadou Mboup [b]

[a] *Department of mathematics*
*Ben Gurion University of the Negev, Israel*
[b] *UFR Mathématiques et Informatique - CRIP5*
*Université Paris Descartes*
*45, rue des Saints-Pères - 75270 Paris cedex 06*
*EPI ALIEN, INRIA*

Reçu le *****; accepté après révision le +++++

Présenté par Jean-Pierre Kahane

**Résumé**

Utilisant la notion de transformée en échelle d'un signal à temps discret, nous définissons une nouvelle famille de systèmes linéaires. Nous considérons un cas particulier, lié à la théorie des fonctions dans le bidisque.
*Pour citer cet article : D. Alpay, M. Mboup, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

**Abstract**

**Scale tranform of discrete stationary signals**
Using the scale transform of a discrete time signal we define a new family of linear systems. We focus on a particular case related to function theory in the bidisk. *To cite this article: D. Alpay, M. Mboup, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

## Abridged English version

A wide class of causal discrete time-invariant linear systems can be given in terms of convolution in the form

$$y_n = \sum_{m=0}^{n} h_{n-m} u_m, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

where $(h_n)$ is the impulse response and where the input sequence $(u_m)$ and output sequence $(y_m)$ are requested to belong to some pre-assigned sequences spaces. The $\mathscr{Z}$ transform of the sequence $(h_n)$, that is

*Earl Katz Chair in Algebraic System Theory
*Email addresses:* dany@cs.bgu.ac.il (Daniel Alpay*), Mamadou.Mboup@mi.parisdescartes.fr (Mamadou Mboup).

$\widehat{h}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n h_n$, is called the *transfer function* of the system, and there are deep relationships between properties of $\widehat{h}$ and of the system; see [1] for a survey. Analogs of systems of the form (1) when both $h_n$ and $u_n$ are Gaussian random variables, which belong to the white noise space, or more generally to the Kondratiev space (see [7] for the latter), have been studied recently in [3]. The pointwise product $h_{m-n}u_m$ in (1) is then replaced by the Wick product (this allows in particular to have a Gaussian output). In view of equations (4) and (5) below, it is well to recall that the Wick product is a convolution when expressed in terms of the Hermite functions. See [7, Definition 2.4.1 p. 39] and [3]. Using the Hermite transform, one can define a generalized transfer function, which is a function analytic in $\zeta$ and in a countable number of other variables (these variables take into account the randomness). In the present note we look at an extension of (1) in a different direction, and develop a new approach to discrete-time systems with a (multi) scale-invariant property. We use the results presented in [10]. Let $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+)$ (that is, a continuous time signal), with Laplace transform $F(s)$, $\Re(s) \geqslant 0$. For every $\alpha = 1/\beta > 0$, the Laplace transform of $f(\beta t)$ is $\sqrt{\alpha}F(\alpha s)$. Therefore, time scaling has the same form in the frequency domain. This remark is the starting point to define the scaling operator for discrete signals. Begin with $G_\theta(s) = \frac{e^{i\theta}-s}{e^{-i\theta}+s}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, which maps conformally the open right half-plane $\mathbb{C}_+$ onto the open unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Then, the scale shift $S_\alpha(s) = \alpha s, \alpha > 0$ expresses in the unit disc as the hyperbolic transformation $\gamma_{\{\alpha\}} = G_\theta \circ S_\alpha \circ G_\theta^{-1}$. Conversely, for each hyperbolic transformation $\gamma(z) = \frac{\gamma_1 z+\gamma_2}{\overline{\gamma}_2 z+\overline{\gamma}_1}$, we may find $\alpha_\gamma > 0$, $\theta_\gamma$ and $\xi_\gamma$ such that $e^{i\xi_\gamma}\gamma(z) = (G_{\theta_\gamma} \circ S_{\alpha_\gamma} \circ G_{\theta_\gamma}^{-1})(e^{i\xi_\gamma} z)$. Therefore, we define below the discrete-time frequency domain scale shift by the action of the (hyperbolic) group of automorphisms of $\mathbb{D}$. We denote this group by $\Gamma_0$. Let $X(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \zeta^n$, which we assume convergent in a neighborhood of the origin. The scale $\alpha = \alpha_\gamma$ shift of the sequence $\{x_n\}_{n\geq 0}$ is the sequence $\{x_n(\gamma)\}_{n\geq 0}$ defined by the equation

$$X_\gamma(\zeta) = \frac{1}{\overline{\gamma}_2 z + \overline{\gamma}_1} X\left(\gamma(\zeta)\right) = \sum_{n\geq 0} x_n(\gamma)\zeta^n. \tag{2}$$

It is useful to note that the operator $\{x_n\}_{n\geq 0} \mapsto \{x_n(\gamma)\}_{n\geq 0}, \gamma \in \Gamma_0$ is an isometry in $\ell_2$ and it also makes sense for vector-valued signals. In particular, $\{x_n\}_{n\geq 0}$ may be a second order stochastic process. In this paper we focus on the case when one considers a cyclic subgroup of infinite order of $\Gamma_0$. Another case of interest is when one considers a Fuchsian group of Widom type. This case is related to self-similar systems, and will be discussed in a separate publication.

## 1. Signaux et systêmes temps-échelle

Étant donné un signal discret $\{x_n\}_{n\geq 0}$, ses transformées en échelles $\gamma \in \Gamma_0$ définissent un signal bidimensionnel $\{x_n(\gamma)\}_{n\geqslant 0, \gamma\in\Gamma}$. Dans la suite, nous considérons le sous groupe cyclique $\Gamma$ de $\Gamma_0$, engendré par $\gamma_0$. Soit $\widehat{\Gamma}$ le groupe dual de $\Gamma$ *i.e.* le groupe des caractères unimodulaires de $\Gamma$ et $d\mu$ sa mesure de Haar. On rappelle qu'un caractère de $\Gamma$ est une application $\sigma : \Gamma \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ satisfaisant :

$$\sigma(\gamma \circ \varphi) = \sigma(\gamma)\sigma(\varphi), \quad \forall \gamma, \varphi \in \Gamma.$$

Pour un $n$ fixé, notons $\{x(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ le signal correspondant, défini sur $\Gamma$. Si $\{x(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_1$, alors sa transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{x}(\sigma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x(\gamma)\sigma(\gamma)^*, \quad \sigma \in \widehat{\Gamma},$$

dont l'inverse est (voir par exemple [6])

$$x(\gamma) = \int_{\widehat{\Gamma}} \widehat{x}(\sigma)\sigma(\gamma)d\mu(\sigma).$$

On interprète cette transformée de Fourier en termes de spectre du signal $\{x(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$. Comme pour le filtrage temporel, on définit le filtrage sur $\Gamma$, dans le domaine fréquentiel par la mutiplication par une transformée de Fourier $\widehat{h}(\sigma)$ : $\widehat{y}(\sigma) = \widehat{h}(\sigma)\widehat{x}(\sigma)$. Ceci correspond dans le domaine des échelles, $\Gamma$, au produit de convolution :

$$y(\gamma) = \sum_{\varphi\in\Gamma} h(\varphi)x(\gamma\circ\varphi^{-1}) = (h\star x)(\gamma). \tag{3}$$

Les systèmes que nous considérons sont définis par une double convolution :

$$y_n = \sum_{m=0}^{n} h_{n-m}\star x_m, \tag{4}$$

c'est-à-dire,

$$y_n(\gamma) = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{\varphi\in\Gamma} h_{n-m}(\gamma\circ\varphi^{-1})x_m(\varphi)\right). \tag{5}$$

La première convolution prend en compte l'invariance dans le temps, tandis que la seconde prend en compte l'échelle. Un phénomème analogue apparaît dans [3].

En prenant la transformée en $\mathcal{Z}$ par rapport au temps et la transformée de Fourier par rapport aux échelles, nous obtenons

$$Y(\zeta,\sigma) = H(\zeta,\sigma)X(\zeta,\sigma) \tag{6}$$

où $H(\zeta,\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n\widehat{h_n}(\sigma)$.

## 2. Lien avec le problème des moments trigonométriques

Dans cette section nous associons à la fonction $H(\zeta,\sigma)$ ci-dessus une fonction analytique dans le bidisque. Puisque $\Gamma$ est cyclique, chaque élément est de la forme

$$\gamma = \gamma_0^m,\ m\in\mathbb{Z},\ \text{avec}\ \gamma_0^m \stackrel{\triangle}{=} \underbrace{\widetilde{\gamma}_0\circ\cdots\circ\widetilde{\gamma}_0}_{m\ \text{fois}}\ \text{où}\ \widetilde{\gamma}_0=\gamma_0\ \text{si}\ m\geqslant 0\ \text{et}\ \widetilde{\gamma}_0=\gamma_0^{-1}\ \text{si}\ m<0.$$

**Theorem 2.1** *Il existe une mesure positive finie $d\nu(\theta)$ sur $[0,2\pi)$ telle que*

$$\int_{\widehat{\Gamma}}\sigma(\gamma_0^m)d\mu(\sigma) = \int_0^{2\pi} e^{im\theta}d\nu(\theta),\quad m\in\mathbb{Z} \tag{7}$$

**Preuve :** Soit $t_m = \int_{\widehat{\Gamma}}\sigma(\gamma_0^m)^*d\mu(\sigma),\quad m\in\mathbb{Z}$. Puisque $|\sigma(\gamma_0)|=1$ pour tout $\sigma\in\widehat{\Gamma}$ nous avons

$$t_{\ell-m} = \int_{\widehat{\Gamma}}\sigma(\gamma_0^\ell)^*(\sigma(\gamma_0^m))d\mu(\sigma) = \langle\sigma(\gamma_0^m),\sigma(\gamma_0^\ell)\rangle_{\mathbf{L_2}(d\mu)}.$$

Les matrices de Toeplitz

$$T_N = (t_{\ell-m})_{\ell,m=0,\dots N},\quad N=0,1,\dots$$

sont toutes non négatives. Le théorème des moments trigonométriques (voir par exemple [8, Theorem 2.7 p. 66]) implique qu'il existe une mesure positive unique $d\nu$ telle que

$$t_m = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta}d\nu(\theta),\quad m=0,1,2,\dots, \tag{8}$$

et nous obtenons (7). $\square$

Par analogie avec le cas de l'espace du bruit blanc (voir [4], [7], [9]), nous appelerons *tranformation de Hermite* l'application linéaire

$$\mathbf{I}(\sigma(\gamma_0^m)) = z^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

de $\mathbf{L}_2(d\mu)$ dans $\mathbf{L}_2(d\nu)$. Cette application est une isométrie en vertu de (7), et elle vérifie

$$\mathbf{I}(\widehat{x}\widehat{y}) = \mathbf{I}(\widehat{x})\mathbf{I}(\widehat{y})$$

pour $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ dans $\mathbf{L}_1(d\mu)$. Grâce à cette application, nous introduisons la définition :
**Définition** 2.1 *La fonction*

$$\mathscr{H}(\zeta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbf{I}(\widehat{h_n})(z) \tag{10}$$

*est appelée fonction de transfert du système* (4).
Des théorèmes de stabilité pour le système peuvent être donnés en termes de cette fonction : voir la section 3. Un cas important est lorsque $\mathscr{H}$ est rationnelle par rapport à la variable $\zeta$.

## 3. Théorèmes de stabilité

Soit $\mathbf{H}_2(d\mu)$ la fermeture dans $\mathbf{L}_2(d\mu)$ des fonctions $\sigma(\gamma_0^n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Un signal causal est par définition une suite $(u_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que,

$$\widehat{u_n} \in \mathbf{H}_2(d\mu), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le fait de se restreindre à $n \geq 0$ correspond au *zooming*. Le phénomène de dilatation serait traduit par les $n < 0$.

Le système (4) est BIBO (*bounded input bounded output*) si il existe un nombre $M > 0$ tel que,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widehat{y_n}\|_{\mathbf{L}_2(d\mu)} \leq M \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widehat{u_n}\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)}$$

pour tous les signaux $(u_n)$ tels que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widehat{u_n}\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)} < \infty$. Il est *dissipatif* si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{y_n}\|^2_{\mathbf{H}_2(d\mu)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{u_n}\|^2_{\mathbf{H}_2(d\mu)}.$$

pour tous les signaux causaux $(x_n)$ tels que le membre de droite de cette inégalité est fini. Le système sera appelé $\ell_1 - \ell_2$ borné si il existe $M > 0$ tel que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{y_n}\|^2_{\mathbf{H}_2(d\mu)}\right)^{1/2} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{u_n}\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)}.$$

Ces définitions se réduisent aux définitions classiques (voir [5]) lorsque $\Gamma$ est trivial. Nous présentons maintenant la caractérisation de ces systèmes.
Soit $h \in \mathbf{H}_2(d\mu)$. Nous définissons l'opérateur de multiplication

$$T_h : x \mapsto h \star x.$$

Supposons $T_h$ continu. Utilisant la transformation de Hermite, nous voyons que $T_h$ est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par $\mathbf{I}(h)$ dans l'espace $\mathbf{L}_2(d\nu)$.

**Théorème 3.1** *Il existe $M < \infty$ tel que*

$$\sup_n \|y_n\|_{\mathbf{L}_2(d\mu)} \leq M \sup_n \|x_n\|_{\mathbf{L}_2(d\mu)} \tag{11}$$

*si et seulement si les opérateurs $T_{h_n}$ sont continu et la condition suivante est remplie : pour tout $v \in \mathbf{H}_2(d\mu)$ tel que $\|v\|_{\mathbf{H}_2(d\mu)} \leq 1$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T_{h_n}^* v\|_{\mathbb{H}_2(d\mu)} \leq M. \tag{12}$$

Nous remarquons que la condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T_{h_n}\| \leq M.$$

implique (12).
Supposons que $\mathbf{H}_2(d\nu) \subsetneq \mathbf{L}_2(d\nu)$. L'espace $\mathbf{H}_2(d\nu)$ est alors un espqce à noyau reproduisant, dont le noyau peut être calculé utilisant les méthodes de [2]. Nous désignons ce noyau reproduisant par $K_\nu(z,w)$
**Théorème 3.2** *Le système* (4) *est dissipatif si et seulement si la fonction $\mathscr{H}(\zeta, z)$ est telle que le noyau*

$$\frac{1 - \mathscr{H}(\zeta, z)\mathscr{H}(\eta, w)}{1 - \zeta\eta^*} K_\nu(z, w)$$

*est positif dans le bidisque.*
**Théorème 3.3** *Le système* (4) *est $\ell_1$-$\ell_2$ borné si et seulement si la fonction $\mathscr{H}(\zeta, z)$ est telle que le noyau*

$$\frac{K_\nu(z, w)}{1 - \zeta\eta^*} - \mathscr{H}(\zeta, z)\mathscr{H}(\eta, w)$$

*est positif dans le bidisque.*
Ces théorèmes sont démontrés de manière analogue aux théorèmes dans [3]. Nous terminons cette section par deux remarques. Nous notons que l'espace à noyau reproduisant de noyau $\frac{K_\nu(z,w)}{1-\zeta\eta^*}$ est le produit tensoriel $\mathbf{H}_2(d\nu) \otimes \mathbf{H}_2(\mathbb{D})$ (où $\mathbf{H}_2(\mathbb{D})$ dénote l'espace de Hardy du disque d'ordre 2). Définissons

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\nu(\theta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Rappelons que le noyau

$$\frac{\varphi(z) + \varphi(w)^*}{1 - zw^*}$$

est positif dans le disque unité ; soit $\mathcal{L}_+(\varphi)$ l'espace à noyau reproduisant associé. L'application qui à $f \in \mathbf{H}_2(d\nu)$ associe la fonction

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})d\nu(\theta)}{e^{i\theta} - z}$$

est unitaire de l'espace $\mathbf{H}_2(d\nu)$ sur $\mathcal{L}_+(\varphi)$. Ce dernier espace a été introduit par de Branges. Voir [1] et [2] pour plus de détails.

## 4. Le cas du polydisque

Dans cette section nous considérons le cas plus général où $\Gamma$ possède un nombre fini de générateurs, que nous dénoterons par $\gamma_0, \ldots, \gamma_p$. Il existe une mesure $d\nu$ positive sur $\mathbb{T}^{p+1}$ telle que

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \sigma(\gamma_0)^{n_0} \cdots \sigma(\gamma_p)^{n_p} d\mu(\sigma) = \int_{\mathbb{T}^{p+1}} e^{i\theta_1 n_1} \cdots e^{i\theta_p n_p} d\nu(\theta_1, \ldots, \theta_p), \quad n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

La preuve de ce résultat nous a été communiquée par M. Putinar, et est comme suit : utilisant les notations (avec $m=(m_0,\ldots,m_p)$ et $n=(n_0,\ldots,n_p)$ dans $\mathbb{N}^{p+1}$),

$$z^m = z_0^{m_0}\cdots z_p^{m_p} \quad \text{et} \quad z^{*n} = (z_0^*)^{n_0}\cdots(z_p^*)^{n_p},$$

on définit une forme linéaire $L$ par

$$L(z^m z^{*n}) = \int_{\widehat{\Gamma}} \sigma(\gamma_0)^{m_0-n_0}\cdots\sigma(\gamma_p)^{m_p-n_p}d\mu(\sigma),$$

et on montre que pour tout polynôme $p(z,z^*)$,

$$L(|p(z,z^*)|^2)\geq 0, \quad \text{et} \quad L((1-|z_j|^2)p(z,z^*))=0 \quad j=0,\ldots,p.$$

Voir [11]. La transformée de Hermite est maintenant une fonction de $p+1$ variables complexes $z_1,\ldots,z_p$, et on peut énoncer des théorèmes de stabilité analogues à ceux de la section 3.

Remerciements : Nous remercions Mihai Putinar pour la preuve de l'existence de la mesure $d\nu$ dans (13).

## Références


[1] D. Alpay. *Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes*, volume 6 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 1998.

[2] D Alpay and H. Dym. Hilbert spaces of analytic functions, inverse scattering and operator models, I, *Integral Equations and Operator Theory* 7 : 589-641 (1984).

[3] D. Alpay and D. Levanony. Linear stochastic systems : a white noise approach. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2009.

[4] F. Biagini, B. Øksendal, A. Sulem, and N. Wallner. An introduction to white-noise theory and Malliavin calculus for fractional Brownian motion, stochastic analysis with applications to mathematical finance. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 460(2041) :347–372, 2004.

[5] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum. *Feedback control theory*. Macmillan Publishing Company, New York, 1992.

[6] E. Hewitt and K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, vol. I/II, Springer, Berlin, Göttingen Heidelberg, 1963/1970.

[7] H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, and T. Zhang. *Stochastic partial differential equations*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[8] M.G. Kreĭn and A.A. Nudelman. *The Markov moment problem and extremal problems*, volume 50 of *Translations of mathematical monographs*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[9] Hui-Hsiung Kuo. *White noise distribution theory*. Probability and Stochastics Series. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[10] M. Mboup. A character-automorphic Hardy spaces approach to discrete-time scale-invariant systems. In *Proceedings of the* 17*th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July 24-28, 2006*, pages 183–188, 2006.

[11] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana Univ. Math. Journal*, 42 : 969-984 (1993)